数理解析研究所講究録
660巻 1988年 52-63

Some remarks in 2nd Microlocalization

(joint works with K. Kataoka)

東大・理　戸瀬信之 (Nobuyuki Tose)

Introduction

M を $\mathbb{R}^{n-d}_t \times \mathbb{R}^d_x$ の開集合で、X をその $\mathbb{C}^{n-d}_w \times \mathbb{C}^d_z$ 中の複素化とする。($w = t + \sqrt{-1}s, z = x + \sqrt{-1}y$) ここで

$$N = \{(w, z) \in X \,;\, \operatorname{Im} w = 0\}$$

$$\tilde{\Sigma} = \mathring{T}^*_N X$$

とおく。$\tilde{\Sigma}$ は $\mathring{T}^*_M X$ 中の正則包合的部分多様体

$$\Sigma = \{(t, x; \sqrt{-1}(\tau dt + \xi dx)) \,;\, \xi = 0\}$$

の部分複素化と呼ばれる。ここで $\mathring{T}^*_M X$ の座標を $\tau \in \mathbb{R}^{n-d}, \xi \in \mathbb{R}^d$ を用いて $(t, x; \sqrt{-1}(\tau dt + \xi dx))$ とおく。$T^*_{\Sigma}\tilde{\Sigma}$ 上に柏原先生は層 $\mathcal{C}^2_\Sigma$ (2-microfunctions の層)を構成した。(1973年 Nice)

$\mathcal{C}^2_\Sigma$ は次のように構成される。局所的には

$$\tilde{\Sigma} \simeq \sqrt{-1}\,\mathring{T}^*\mathbb{R}^{n-d} \times \mathbb{C}^d_z$$

と同一視できることに注意する。$\tilde{\Sigma}$ 上には層 $\mathcal{C}_{\tilde{\Sigma}}$, 即ち

$$\mathcal{C}_{\tilde{\Sigma}} = H^{n-d}(\mu_N(\mathcal{O}_X))$$

なる z を正則パラメーターとして持つ micro 函数の層が定義さ

れる。この時 $\mathcal{C}^2_\Sigma$ は,

$$\mathcal{C}^2_\Sigma = H^d(\mu_\Sigma(\mathcal{C}_{\tilde{\Sigma}}))$$

として定義される。ここで $\mu_*(\cdot)$ は佐藤の超局所化の関手である。$\mathcal{C}^2_\Sigma$ の最も重要な性質として、次の完全系列があることが挙げることが出来る。

$$0 \to \mathcal{A}^2_\Sigma \to \mathcal{B}^2_\Sigma \to \pi_*(\mathcal{C}^2_\Sigma|_{\dot{T}^*_\Sigma \tilde{\Sigma}}) \to 0$$

$$0 \to \mathcal{C}_M|_\Sigma \to \mathcal{B}^2_\Sigma.$$

ここで

$$\mathcal{A}^2_\Sigma = \mathcal{C}_{\tilde{\Sigma}}|_\Sigma \quad \text{及び} \quad \mathcal{B}^2_\Sigma = \mathcal{C}^2_\Sigma|_\Sigma$$

とおいた。更に、規範的なスペクトル写像

$$Sp^2_\Sigma : \pi^{-1}\mathcal{B}^2_\Sigma \longrightarrow \mathcal{C}^2_\Sigma \qquad (\pi : T^*_\Sigma \tilde{\Sigma} \longrightarrow \Sigma)$$

があり、これを用いて $u \in \mathcal{C}_M|_\Sigma$ に対して u の Σ に沿った第2超局所台を

$$SS^2_\Sigma(u) := \mathrm{supp}\,(Sp^2_\Sigma(u))$$

とおく。($\mathcal{C}^2_\Sigma$ については [K-L] を参照のこと。)

この小論の目的の一つとして、$\mathcal{C}^2_\Sigma$ の部分層 $\dot{\mathcal{C}}^2_\Sigma$ を構成して、完全系列

$$0 \to \mathcal{A}^2_\Sigma \to \mathcal{C}_M|_\Sigma \to \pi_*(\dot{\mathcal{C}}^2_\Sigma) \to 0$$

が成立するようにすることである。様々な問題の解の構成に第2超局所化を応用する時には必須となると予想される。

§1. Flabbiness of $\mathcal{C}^2_\Sigma$.

この節では Σ を $S^*_M X$ 中の正則包合的な部分多様体

$\Sigma=\{(t,x;\sqrt{-1}(\tau,\xi)\infty);\ \ \xi=0\}$

と考える。更に $\tilde{\Sigma}=S^*_N X\simeq\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^{n-d}\times\mathbb{C}^d$ とおく。$\mathcal{C}^2_\Sigma|_{T^*_\Sigma\tilde{\Sigma}}$ を $S^*_\Sigma\tilde{\Sigma}$ 上の層として考え、$\mathcal{C}^2_\Sigma$ が脆弱であることを示すのがこの節の目的である。

定理1.1. $\mathcal{C}^2_\Sigma$ は $S^*_\Sigma\tilde{\Sigma}$ 上の脆弱層である。

この定理は[SKK]と同様に次の定理を示すことに帰着される。

$M=L\times\mathbb{R}^d_x$ として Introduction と同様に $X, N, \Sigma, \tilde{\Sigma}, \mathcal{C}_{\tilde{\Sigma}}$, A^2_Σ を定めることが出来る。但し、L は p 次元の向き付け可能な C^ω 級多様体である。但し Σ は $S^*_M X$ 中, $\tilde{\Sigma}=S^*_N X$ として $\mathcal{C}_{\tilde{\Sigma}}$ は $\tilde{\Sigma}$ 上, A^2_Σ は Σ 上の層として考える。この時、次が成立する。

定理1.2. U を Σ の任意の開集合とする。このとき、

$$H^k(U, A^2_\Sigma)=0 \qquad (\forall k>0)$$

が成立する。

(証明) M に一変数 x_0 を加えて、$M_0=L\times\mathbb{R}^{d+1}_{(x_0,x)}$ とおく。$\tilde{L}$ を L の複素近傍として $X_0=\tilde{L}\times\mathbb{C}^{d+1}_{(z_0,z)}$ と定め、更に、$N_0, \Sigma_0, \tilde{\Sigma}_0$ を $N, \tilde{\Sigma}, \Sigma$ と同様に

$$N_0 = L \times \mathbb{C}^{d+1}_{(z_0,z)}, \quad \Sigma_0 \simeq \sqrt{-1}S^*L \times \mathbb{R}^{d+1}_{(x_0,x)}$$
$$\tilde{\Sigma}_0 = S^*_{N_0}X_0 \simeq \sqrt{-1}S^*L \times \mathbb{C}^{d+1}_{(z_0,z)}$$

とおく。$P = (\partial/\partial x_0)^2 + \cdots + (\partial/\partial x_n)^2$ なるLaplace作用素を考えて,

$$\mathcal{C}^P_{M_0} = \ker\{P : \mathcal{C}_{M_0} \to \mathcal{C}_{M_0}\}$$

とおく。すると

$$0 \to \mathcal{C}^P_{M_0}\big|_{\Sigma_0} \to \mathcal{C}_{M_0}\big|_{\Sigma_0} \xrightarrow{P} \mathcal{C}_{M_0}\big|_{\Sigma_0} \to 0$$

なる完全系列が、Bony-Schapira [B-S] のpartially elliptic作用素の可解性から導かれる。またpartially elliptic operatorの性質から

$$\begin{aligned}\mathcal{C}^P_{M_0}\big|_{\Sigma} &\simeq \ker\{P ; \mathcal{A}^2_{\Sigma_0} \to \mathcal{A}^2_{\Sigma_0}\}\big|_{\Sigma} \\ &\simeq (\mathcal{A}^2_{\Sigma})^2\end{aligned}$$

であることが分る。([B-S] 及び Kashiwara-Schapira [K-S1] を参照のこと.) ここで Σ を $\Sigma_0 \cap \{x_0 = 0\}$ と同一視した. 以上により

$$0 \to (\mathcal{A}^2_{\Sigma})^2 \to \mathcal{C}_{M_0}\big|_{\Sigma} \xrightarrow{P} \mathcal{C}_{M_0}\big|_{\Sigma} \to 0$$

なる $(\mathcal{A}^2_{\Sigma})^2$ の脆弱分解を得た。更に、P の大域的な可解性は、P の基本解の存在より従う。よって、求める消滅定理が証明された。

注意: 上の証明法は P. Schapira 教授の示唆による.

§2. P. Laubin とP. Esser の仕事.

$\overset{\circ}{\mathcal{C}}{}^2_\Sigma$ の理解を深めて頂くために、この節では Liège の P. Laubin と P. Esser の仕事を紹介しよう。この節では、Introduction の設定のもとで議論する.即ち、M を $\mathbb{R}^{n-d}_t \times \mathbb{R}^d_x$ の開集合, X を $\mathbb{C}^{n-d}_w \times \mathbb{C}^d_z$ 中の M の複素近傍とする。更に

$$\Sigma = \{ (x; (\tau, \xi)) \in \overset{\circ}{T}{}^*M ; \xi = 0 \}$$

とおく。この時、FBI変換を用いて 2nd analytic Wavefront set (第2解析的波面集合) を次のように定義する. ω を M の有界開集合, $u \in (A(\overline{\omega}))'$ に対して,

定義 $WF^{(2)}_{a,\Sigma}(u) \not\ni (t_0, x_0; \tau_0, x_0^*)$

$\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ 正数 $\varepsilon, r, \mu_0, C > 0$ 及び $]0, \mu_0[$ 上の減少函数 $f(\mu)$ が存在して

$$|z - (x_0 - i x_0^*)| < r, \ |w - (t_0 - i\tau_0)| < r$$

$$\lambda > f(\mu), \ 0 < \mu < \mu_0$$

なる時

$$\left| \int u(x,t) e^{-\frac{\lambda\mu}{2}(z-x)^2 - \frac{\lambda}{2}(w-t)^2} dx\,dt \right| \le C e^{\frac{\lambda\mu}{2}|\mathrm{Im}\, z|^2 + \frac{\lambda}{2}|\mathrm{Im}\, w|^2 - \varepsilon\mu\lambda}$$

が成立する.

上の定義で $T_\Sigma T^*M$ の座標として $(t, x; \tau; x^*)$ とおいた。

P. Laubin と P. Esser の仕事の紹介の為に tuboid などの定義をまずする.

— $\mathbb{C}^n$ の集合 Λ が <u>profile</u> であるとは

$$(x+\sqrt{-1}y,\ t+\sqrt{-1}s)\in\Lambda,\ r>0 \Rightarrow (x+\sqrt{-1}ry,\ t+\sqrt{-1}rs)\in\Lambda$$

が成立すること.

— $$\Omega := \{(x,t)\in\mathbb{R}^n;\ \exists(y,s)\in\mathbb{R}^n \text{ s.t. } (x+\sqrt{-1}y,\ s+\sqrt{-1}t)\in\Lambda\}$$

とおいて, Λ の <u>base</u> と呼ぶ.

— Λ が <u>convex</u> とは

$$\Lambda_{(x,t)} := \{(y,s)\in\mathbb{R}^n;\ (x+\sqrt{-1}y,\ t+\sqrt{-1}s)\in\Lambda\}$$

が任意の (x,t) に対して convex.

— $$\Lambda^*_{(x,t)} := \{(\xi,\tau)\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\};\ y\cdot\xi+s\cdot\tau\geqq 0\ (\forall(y,s)\in\Lambda_{(x,t)})\}$$
$$\Lambda^* = \{(x,t;\xi,\tau)\in T^*\Omega;\ (\xi,\tau)\in\Lambda^*_{(x,t)}\}$$

とおく。

— $\mathbb{C}^n$ の開集合 $\tilde{\Omega}$ が Λ を profile とする <u>tuboid</u> とは

$K\subset\Lambda$ なる任意のコンパクト集合 K に対して正数 R が存在して

$$\{(x+\sqrt{-1}ry;\ t+\sqrt{-1}rs);\ 0<\forall r<R,\ (x+\sqrt{-1}y,\ t+\sqrt{-1}s)\in K\} \subset \tilde{\Omega}.$$

第2超局所化と深い関係を持つのは次の定義中の特別な形の profile である.

<u>定義</u>: convex profile Λ が Σ-profile とは

$$(x+\sqrt{-1}y,\ t+\sqrt{-1}s)\in\Lambda,\ r>0 \Rightarrow (x+\sqrt{-1}y,\ t+\sqrt{-1}rs)\in\Lambda$$

が成立することである。このとき,

$$\Lambda'_{(x,t)} := \{ y \in \mathbb{R}^d ;\ \exists s \in \mathbb{R}^{n-d} \ \text{s.t.}\ (y,s) \in \Lambda_{(x,t)} \}.$$

とおく。

P. Laubin と P. Esser は次の定理を示した。（[L−E]）

<u>定理</u>　$\tilde{\Omega}$ を tuboïd with Σ profile Λ とする。f を $\tilde{\Omega}$ 上の正則函数とする時，

$$WF^{(2)}_{a,\Sigma}(b(f)) \subset \{ (t,x;\tau,x^*) ;\ (t,x) \in \Omega,\ (0,\tau) \in \Lambda^*_{(t,x)},\ x^* \in \Lambda^*_{(t,x)} \}$$

が成立する。

<u>注意</u>　$SS^2_\Sigma(b(f))$ に対して同様の評価を得るのは、野呂正行[Noro]の $\mathcal{C}^2_\Sigma$ に対する Radon 変換を用いるとほとんど自明である。（野呂−戸瀬[N−T]も参照のこと。）

<u>§3. 層 $\mathring{\mathcal{C}}^2_\Sigma$</u>

$S_\Sigma(\sqrt{-1}S^*M)$ の座標として $(t,x;\sqrt{-1}\tau dt\infty;\sqrt{-1}\tilde{\xi}\, d/\partial\xi\, 0)$ ととる。（$\tilde{\xi} \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$）。$X$ の M を中心とする Σ に沿った comonoidal 変換を

$$\mathrm{Mon}^{2*}_{\Sigma,M}(X) = (X \setminus M) \sqcup S_\Sigma(\sqrt{-1}S^*M) \xrightarrow{\pi_\Sigma} X$$

により定める。$\mathrm{Mon}^{2*}_{\Sigma,M}(X)$ には以下に述べるように位相を与える。即ち，まず $X \setminus M$ の点の近傍系としては，普通の位相を入れる。更に、$\mathring{p} = (\mathring{t},\mathring{x};\sqrt{-1}\mathring{\tau}dt\infty;\sqrt{-1}\mathring{\tilde{\xi}}\, d/\partial\xi\, 0) \in S_\Sigma(\sqrt{-1}S^*M)$ の基本近傍系

として，$\varepsilon > 0$ に対して

$$\bigcup_{\substack{|\tau|=1 \\ |\tau-\tau_0|<\varepsilon \\ 0\neq|\tilde{\xi}|<\varepsilon \\ \left|\frac{\tilde{\xi}}{|\tilde{\xi}|}-\tilde{\xi}_0\right|<\varepsilon}} \left\{ (z,w)\in\mathbb{C}^n ;\ \begin{array}{l} |z-\mathring{x}| + |w-\mathring{t}| < \varepsilon \\ \langle \mathrm{Im}\, z, \tilde{\xi}\rangle + \langle \mathrm{Im}\, w, \tau\rangle > 0 \end{array} \right\}$$

$\cup$ ($S_\Sigma^1(\sqrt{-1}S^*M)$ 中の $\mathring{p}$ の ε-近傍系)

として与える。この時 $\mathcal{C}_\Sigma^2$ を次のように定義する。

定義 $\quad \mathcal{C}_\Sigma^2 = R\Gamma_{S_\Sigma^1(\sqrt{-1}S^*M)}(\pi_\Sigma^{-1}\mathcal{O}_X)[n]$

まず、上の定義で右辺は純 0 余次元的であることに注意する。それは、$\mathcal{O}_X$ の Edge of the Wedge からすぐに分る。以下層 $\mathcal{C}_\Sigma^2$ の性質を列挙して行く。

① Σ 上には完全系列

$$0 \to \mathcal{A}_\Sigma^2 \to \mathcal{C}_M|_\Sigma \to \pi_* \mathcal{C}_\Sigma^2 \to 0$$

が存在する．$(\pi_* : S_\Sigma(\sqrt{-1}S^*M) \longrightarrow \Sigma)$

その証明の idea を述べる。X の M を中心とする Σ に沿った monoidal 変換

$$\mathrm{Mon}^2_{\Sigma,M}(X) = T_{\tilde{\Sigma}}\tilde{\Sigma} \sqcup (X \smallsetminus M) \longrightarrow X$$

に適当な topology を入れる。そして

$$j : (X \setminus M) \hookrightarrow \mathrm{Mon}^2_{\Sigma,M}(X)$$

を用いて,

$$\mathcal{C}_\Sigma = \mathbb{R}j_*(\mathcal{O}_X|_{X\setminus M})|_{T^*_\Sigma(\mathring{T}^*_M X)}[n-d]$$

とおく。更に右の diagram によって Fourier 変換を行なうと、

$$\to \mathbb{R}\Gamma_\Sigma(\mathcal{F}(\mathcal{C}_\Sigma)) \to \mathbb{R}\pi_*(\mathcal{F}(\mathcal{C}_\Sigma)) \to \mathbb{R}\mathring{\pi}_*(\mathcal{F}(\mathcal{C}_\Sigma)) \xrightarrow{+1}$$

なる完全系列を得る。これは、実は上の求める完全系列に他ならない。

$$\begin{tikzcd}
& T^*_\Sigma \mathring{T}^*_M X \times_\Sigma T_\Sigma \mathring{T}^*_M X \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
T^*_\Sigma(\mathring{T}^*_M X) \arrow[dr] & & T_\Sigma \mathring{T}^*_M X \arrow[dl] \\
& \Sigma &
\end{tikzcd}$$

② 第2節の定理1.2を用いると
"$\mathcal{C}^2_\Sigma$ は $S_\Sigma(\mathring{S}^*_M X)$ 上の脆弱層である."
ことが分る.

③ (Radon変換)

この③においては T^*X の座標として $(w, z; \theta dw + \zeta dz)$ とおき,
Σの T^*X 中の複素化を

$$\Sigma^{\mathbb{C}} = \{(w,z;\theta dw+\zeta dz) ; \zeta = 0\}$$

と定める. $\Sigma^{\mathbb{C}} \hookrightarrow \Sigma^{\mathbb{C}}\times\Sigma^{\mathbb{C}}$ を埋め込み

$$T^*X \simeq T^*_X(X\times X) \hookrightarrow T^*(X\times X)$$

より引き起こす. $\tilde{\Sigma}^{\mathbb{C}}$ は $\Sigma^{\mathbb{C}}\times\Sigma^{\mathbb{C}}$ の複素の陪特性帯条件で, $\Sigma^{\mathbb{C}}$を

通るものの合併集合とする。そして $T^*_{\Sigma^\alpha}\tilde{\Sigma}^c$ の座標を $(w, z; \theta dw; z^* dz)$ と定める。

まず次のことに注意しよう。$\rho_0 = (0, 0; \sqrt{-1}\tau_0 dt) \in \Sigma (\subset \mathring{T}^*_M X)$ の点に対して

$$\mathcal{S}^j_\varepsilon = \left\{ \sum_{|\alpha|=j} f_\alpha(w, z; \theta, \zeta)\, d(\tau, \zeta)^\alpha ;\ f_\alpha \text{は}(-j)\text{次斉次かつ}, \ f_\alpha \in \mathcal{O}\left(\left\{ \begin{array}{l} |w| < \varepsilon,\ |z| < \varepsilon \\ \left| \dfrac{(\mathrm{Im}\,\theta, \mathrm{Im}\,\zeta)}{|(\mathrm{Im}\,\theta, \mathrm{Im}\,\zeta)|} - (0, \tau_0) \right| < \varepsilon \\ -\mathrm{Re}(\langle z, \zeta \rangle + \langle w, \theta \rangle) > \frac{1}{\varepsilon}(|\mathrm{Re}\,\zeta| + |\mathrm{Re}\,\theta|) \end{array} \right\} \right) \right\}$$

とおくと、

$$\mathcal{C}_{M, \rho_0} = \varinjlim_{\varepsilon} \mathcal{S}^{n-1}_\varepsilon \Big/ d_{(\zeta, \tau)} \mathcal{S}^{n-1}_\varepsilon$$

と表わされることに注意しよう。(片岡 [K])

ここで $p_0 = (0, 0; \sqrt{-1}\tau dt; \sqrt{-1}\mathring{x}^*_0) \in \mathring{T}^*_\Sigma \tilde{\Sigma}$ に対して

$$\mathring{\mathcal{S}}^{2\,(j)}_{\Sigma, \varepsilon} = \left\{ \sum_{|\alpha|=j} f_\alpha(w, z; \theta, z^*)\, d(\theta, z^*)^\alpha ;\ f_\alpha \text{は}(\theta, z^*)\text{に関して}(-j)\text{次斉次かつ} \ f_\alpha \in \mathcal{O}\left(\left\{ \begin{array}{l} |w| < \varepsilon,\ |z| < \varepsilon \\ 0 < |\mathrm{Im}\, z^*| < \varepsilon |\mathrm{Im}\,\theta| \\ \left| \dfrac{\mathrm{Im}\,\theta}{|\mathrm{Im}\,\theta|} - \tau_0 \right| < \varepsilon,\ \left| \dfrac{\mathrm{Im}\, z^*}{|\mathrm{Im}\, z^*|} - x^*_0 \right| < \varepsilon \\ -\mathrm{Re}(\langle z, z^* \rangle + \langle w, \theta \rangle) > \frac{1}{\varepsilon}(|\mathrm{Re}\, z^*| + |\mathrm{Re}\,\theta|) \end{array} \right\} \right) \right\}$$

と定める時、

$$\mathring{\mathcal{C}}^2_\Sigma = \varinjlim_{\varepsilon \to +0} \mathring{\mathcal{S}}^{2\,(n-1)}_{\Sigma, \varepsilon} \Big/ d_{(\tau, x^*)} \mathring{\mathcal{S}}^{2\,(n-2)}_{\Sigma, \varepsilon}$$

を得る。更に上の Radon 変換と野呂正行の $\mathcal{C}^2_\Sigma$ の Radon 変換を用いると、単射的な morphism

$$\mathring{\mathcal{C}}^2_\Sigma \rightarrowtail \mathcal{C}^2_\Sigma$$

を構成することができる。更に容易に

$$SS^2_\Sigma(\cdot) = WF^2_{a,\Sigma}(\cdot)$$

なる同等性を分布あるいはコンパクト台を持つ hyperfunction に対して示すことが出来る.

Reference

[B-S] Bony, J.M. and P. Schapira, Propagation des singularités analytiques pour les solutions des équatiions aux dérivées partielles, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 26 (1976), pp. 81-140.

[K-L] Kashiwara,M. and Y. Laurent, Théorèmes d'annulation et deuxiemès microlocalisation, Prépublication d'Orsay (1983).

[K] Kataoka, K., On the theroy of Radon transformation of hyperfunctions, J. Fac. Sci., Univ. of Tokyo Sect IA Math. 28 (1981), pp. 331-413.

[K-S1] Kashhiwara, M. and P. Schapira, Microhyperbolic systems, Acta Math. 142 (1979), 1-55.

[K-S2] -------, Microlocal Study of sheaves, Astérisque 128 (1987).

[K-T] Kataoka, K. and N. Tose, Vanishing Theorem for the Sheaf of Microfunctions with Holomorphic Parameters ---- Flabbiness of the sheaf of 2-microfunctions, preprint.

[L-E] Laubin, P. and P. Esser, preprint.

[Noro] Noro, M. Master thesis presented to Univ. of Tokyo (1985).

[N-T] Noro,M. and N. Tose, The theory of Radon transformations and 2-microfunctions, J. Fac. Sci., Univ. of Tokyo Sect IA Math. 34 (1987), pp. 309-349.